

Total number of printed pages-31

3 (Sem-1/CBCS) MAT HG 1/2/RC

2023

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

For Honours Generic

Attempt either MAT-HG-1016 or MAT-HG-1026

For Regular

Attempt MAT-RC-1016

OPTION-A

Paper : MAT-HG-1016/MAT-RC-1016

(Calculus)

OPTION-B

Paper : MAT-HG-1026

(Analytical Geometry)

Full Marks : 80

Time : Three hours

***The figures in the margin indicate
full marks for the questions.***

Answer either in English or in Assamese.

Contd.

OPTION-A

Paper : MAT-HG-1016/MAT-RC-1016

(Calculus)

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the value of $\cos 1740^\circ$.

$\cos 1740^\circ$ ৰ মান উলিওৱা।

(b) What are the domain and range of the function $f(x) = \sin^{-1} x$?

$f(x) = \sin^{-1} x$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ লিখা।

(c) If $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -4$ and $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$, find

$$\lim_{x \rightarrow a} [h(x) - 3g(x) + 1].$$

যদি $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -4$ আৰু $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$, তেন্তে

$$\lim_{x \rightarrow a} [h(x) - 3g(x) + 1] \text{ ৰ মান উলিওৱা।}$$

(d) Find k for which $f(x) = \begin{cases} 7x - 2k, & x \leq 1 \\ 4x^2, & x > 1 \end{cases}$

is continuous at 1.

k ৰ মান উলিওৱা যাৰ বাবে

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 2k, & x \leq 1 \\ 4x^2, & x > 1 \end{cases}$$

ফলনটো $x=1$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(e) Find the n th derivative of $y = x^n$.

$y = x^n$ ফলনৰ n -তম অৱকলজ উলিওৱা।

(f) State whether, the following statement is true **or** false :

The function $f(x) = \cos x$ is increasing in the interval $[0, \pi]$.

তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা উল্লেখ কৰা :

$f(x) = \cos x$ ফলনটো $[0, \pi]$ অন্তৰালত বৰ্ধমান।

- (g) State whether the following statement is true **or** false :

Every continuous function is differentiable.

তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা উল্লেখ কৰা :

প্রতিটো অবিচ্ছিন্ন ফলনেই অৱকলনীয়।

- (h) Find $\frac{\partial u}{\partial x}$ if $u = \log(x^2 + y^2)$.

$\frac{\partial u}{\partial x}$ নির্ণয় কৰা যদি $u = \log(x^2 + y^2)$ ।

- (i) If $f(x) = x(x-1)$, then on which interval the function is decreasing ?

যদি $f(x) = x(x-1)$, তেন্তে কি অন্তৰালত ফলনটো হ্রাসমান?

- (j) Show that the function $f(x) = \sin x$ is not one-one in the interval $[0, \pi]$.

দেখুওৱা যে $f(x) = \sin x$ ফলনটো $[0, \pi]$ অন্তৰালত একৈকী নহয়।

2. Answer the following questions : $2 \times 5 = 10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Explain why $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ does not exist.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ কিয় স্থিত নহয় ব্যাখ্যা কৰা।

(b) Find the n th derivative of the function $y = a^{mx}$.

$y = a^{mx}$ ফলনটোৰ n তম অৱকলজ উলিওৱা।

(c) If $v = x^2 + y^2 + z^2$, then prove that

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z} = 2v.$$

যদি $v = x^2 + y^2 + z^2$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z} = 2v.$$

(d) If $y = \sin^{-1} x$, then prove that

$$(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$$

যদি $y = \sin^{-1} x$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$$

(e) Prove that $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

প্রমাণ কৰা যে $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

3. Answer **any four** questions : $5 \times 4 = 20$

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Let $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$. Find

$f\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ and the natural domain of f .

ধৰা হ'ল $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$,

$f\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ আৰু f ৰ স্বাভাৱিক আদিক্ষেত্র

উলিওৱা।

(b) If $y = e^{a \sin^{-1} x}$, then prove that

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - (n^2 + a^2)y_n = 0$$

যদি $y = e^{a \sin^{-1} x}$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - (n^2 + a^2)y_n = 0$$

(c) Show that the area of a triangle ABC

is $\frac{1}{2}ca \sin B$.

দেখুওৱা যে ABC ত্ৰিভুজৰ কালি $\frac{1}{2}ca \sin B$.

(d) If f and g are continuous at c in its domain and $g(c) \neq 0$, show that $\frac{f}{g}$ is also continuous at c .

যদি f আৰু g ফলন দুটা ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰৰ c বিন্দুত
অবিচ্ছিন্ন আৰু $g(c) \neq 0$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $\frac{f}{g}$
ফলনটোও c বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(e) Evaluate, using L'Hôpital rule :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$$

এলহ'চপিতাল নিয়ম প্রয়োগ কৰি মান উলিওঁৱা :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$$

(f) If u is a homogeneous function of x and y of degree n , show that

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

যদি u এটা x আৰু y ৰ n ঘাতৰ সুসম ফলন, তেন্তে
প্রমাণ কৰা যে

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

Answer **either** (a) **or** (b) from the following questions : 10×4=40

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ (a) বা (b) অংশৰ উত্তৰ কৰা :

4. (a) (i) Let $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x < -2 \\ x^2 - 5, & -2 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, & x > 3 \end{cases}$

Find (a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

5

ধৰা হ'ল $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x < -2 \\ x^2 - 5, & -2 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, & x > 3 \end{cases}$

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Find the value of k and m for which the following function f is continuous everywhere: 5

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x > 2 \\ m(x+1) + k, & -1 < x \leq 2 \\ 2x^3 + x + 7, & x \leq -1 \end{cases}$$

k আৰু m ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাৰ বাবে তলত দিয়া ফলনটো সদায় অবিচ্ছিন্ন :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x > 2 \\ m(x+1) + k, & -1 < x \leq 2 \\ 2x^3 + x + 7, & x \leq -1 \end{cases}$$

- (b) (i) If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, then prove that

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{3}{x+y+z} \quad 5$$

যদি $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{3}{x+y+z}$$

- (ii) State Euler's theorem on homogeneous function. If

$$u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}, \quad x \neq y, \quad \text{then}$$

$$\text{prove that } x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u. \quad 5$$

সুসম ফলনৰ বাবে ইডলাৰৰ উপপাদ্যৰ উক্তি

$$\text{দিয়া। যদি } u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}, \quad x \neq y,$$

তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u.$$

5. (a) (i) State and prove Leibnitz theorem. 5
লেইবনিটজৰ উপপাদ্যৰ উক্তি দি প্রমাণ কৰা।

$$(ii) \text{ If } \cos^{-1} \frac{y}{b} = \log \left(\frac{x}{n} \right)^n, \text{ prove that}$$

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)x y_{n+1} + 2n^2 y_n = 0.$$

5

$$\text{যদি } \cos^{-1} \frac{y}{b} = \log \left(\frac{x}{n} \right)^n, \text{ প্রমাণ কৰা যে}$$

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)x y_{n+1} + 2n^2 y_n = 0$$

(b) State and prove Lagrange's mean value theorem. Also state Rolle's theorem and verify it for the function

$$f(x) = x(x+3)e^{-x/2} \text{ in } [-3, 0]$$

$$1+4+1+4=10$$

লাগ্ৰাঞ্জৰ উপপাদ্যৰ উক্তি দি প্ৰমাণ কৰা। আকৌ ৰোলৰ উপপাদ্যৰ উক্তি দিয়া আৰু ইয়াক $[-3, 0]$ অন্তৰালত

$$f(x) = x(x+3)e^{-x/2} \text{ ফলনৰ বাবে সত্যাপন কৰা।}$$

6. (a) (i) Find the Maclaurin series for e^x and $\sin x$. 5

e^x আৰু $\sin x$ ৰ বাবে মেৰুৰিণৰ শ্ৰেণীবোৰ উলিওৱা।

(ii) Show that $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$

for $x > 0$. 5

$x > 0$ ৰ বাবে দেখুওৱা যে

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x.$$

- (b) (i) A triangle has sides $a = 3$ units, $b = 4$ units and $c = 90^\circ$. Find the length of the side c . 5

এটা ত্ৰিভুজৰ বাহুবোৰ হ'ল $a = 3$ একক, $b = 4$ একক আৰু $c = 90^\circ$. c বাহুটোৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Prove that

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

Hence deduce that

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \quad 5$$

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

ইয়াৰ সহায়ত দেখুওৱা যে

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

7. (a) (i) If $y = \cos(m \sin^{-1} x)$, then show that

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)x y_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0.$$

5

যদি $y = \cos (m \sin^{-1} x)$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)x y_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0$$

(ii) Show that the function

$z = e^x \sin y + e^y \cos x$ satisfies the

equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. 5

দেখুওৱা যে $z = e^x \sin y + e^y \cos x$

ফলনটোৱে $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ সমীকৰণটো

সিদ্ধ কৰে।

(b) (i) Find the values of a and b in

order that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+a \cos x) - b \sin x}{x^3}$

is equal to 1. 5

a আৰু b ৰ মান উলিওৱা যাতে

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+a \cos x) - b \sin x}{x^3}$ ৰ মান 1 হয়।

(ii) Describe the level surfaces of the following functions : $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

তলত দিয়া ফলনবোৰৰ পৃষ্ঠস্বৰ বৰ্ণনা কৰা :

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

(b) $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$
